OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2022 – 2023
ETAPA LOCALĂ
11.02.2023

CLASA A VII -A

BAREM

Subiectul I. *Demonstrați că toate numerele de forma* $\sqrt{\overline{a2}\cdot\overline{a4}+1}$ *sunt naturale.*

$\sqrt{12\cdot 14+1}$=13(sau orice alt caz particular)	2p
Pentru fiecare din cele 8 cazuri rămase se acordă 0,5 puncte, finalizare 1p. Dacă elevul observă doar forma rezultatului, fără a efectua calculele complet, evidențiind radicalii numerelor 529,1089,1849,2809, 3969, 5329, 6889, 8649, punctajul se va diminua cu 2 puncte.	5p

Alternativ,

$\overline{a2}\cdot\overline{a4}=(\overline{a3}-1)\cdot(\overline{a3}+1)$=$\overline{a3}^2-1$	4p
$\sqrt{\overline{a3}^2-1+1}$=$\overline{a3}\in\mathbb{N}$	3p

Subiectul II. *Se consideră paralelogramul ABCD și punctul E, mijlocul laturii BC. Dacă alegem punctul* $F\in(BD)$ *astfel încât DF= 2BF, demonstrați că punctele A, F și E sunt coliniare.*

Dacă O este punctul de intersecție al diagonalelor, atunci este mijlocul fiecărei diagonale.	1p
DF= 2BF, deci $\frac{BF}{BO}=\frac{2}{3}$	2p
Cum BO este mediană în triunghiul ABC, rezultă că F este centrul de greutate al triunghiului	2p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro

$F \in (AE)$ de unde coliniaritatea punctelor A,F,E	2p

Subiectul III.

a) *Demonstrați că mulțimea* $A = \left\{\sqrt{5^{(a+b)(b+c)(c+a)}} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{N}\right\}$ *este inclusă în mulțimea numerelor raționale.*

b) *Aflați* $A \cap \left\{\sqrt{n! + 4^n + 7} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, *unde* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

$a,b,c \in \mathbb{N}$, deci cel puțin două dintre ele au aceeași paritate(Dirichlet) $(a+b)(b+c)(c+a) = 2k$	1p
$\sqrt{5^{2k}} = 5^k$, deci $A \subset \mathbb{Q}$	1p
Pentru n=1avem $\sqrt{n! + 4^n + 7}$=$\sqrt{12} \notin A$	1p
Pentru n=2 avem $\sqrt{n! + 4^n + 7}$=$\sqrt{25} = 5$ Pentru a=0 și b=c=1 rezulta ca $5 \in A$	1p
Pentru n≥ 3 avem $n! + 4^n + 7 = 3k + 2$, deci $n! + 4^n + 7$ nu poate fi pătrat perfect, deci $A \cap \left\{\sqrt{n! + 4^n + 7} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{5\}$	3p

Subiectul IV

Fie triunghiul ABC *în care* $\hat{B} = 75^0, \hat{C} = 45^0, BM \perp AC,\ M \in AC$ *și* $D \in (AB)$ *astfel încât* $\widehat{ACD} = 15^0$. *Dreapta* BM *intersectează perpendiculara în* D *pe* CD *în* E *și dreapta CD în F.*

a) *Demonstrați că triunghiul BDF este isoscel, unde .*

b) *Se arate că segmentele DE și BC sunt congruente.*

$\widehat{BFD} = 75^0$, $\widehat{BDF} = 75^0$, de unde triunghiul BDF este isoscel.	2p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro

Se consideră punctele G, H astfel încât $CG \perp BD, G \in BD$ și $DH \perp BM, H \in BM.$ În ΔDBH avem $DH = \frac{BD}{2} = BG$	2p
Din congruența triunghiurilor BGC și DHE rezultă că DE=BC	3p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro