OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2022 – 2023
ETAPA LOCALĂ
11.02.2023
CLASA A VI -A
BAREM

Subiectul I

Se consideră numerele $a = 2n + 1, b = 3n + 2$ *și* $c = 4n + 3$, unde n este număr natural.

Demonstrați că numărul $\frac{[a,b]+[b,c]}{2}$ este un pătrat perfect mai mare sau egal cu 4, unde prin $[x , y]$se înțelege cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y.

Barem:

Demonstrează că (a,b)=1 și (b,c)=1..2p

$[a, b] = a \cdot b$ *și* $[b, c] = b \cdot c$..1p

$N = \frac{a\cdot b+b\cdot c}{2} = \frac{b(a+c)}{2} = (3n + 2)^2$, deci p.p.......................................3p

Din $n \geq 0$, rezultă $(3n + 2)^2 \geq 2^2 = 4$...1p

Subiectul II

Determinați numerele x, y, z știind că $\frac{2x}{3y+7z} = \frac{3y}{2x+7z} = \frac{7z}{2x+3y}$ și $7x + 2y + 3z = 965$.

Barem:

$k = \frac{2x+3y+7z}{4x+6y+14z} = \frac{1}{2}$ ………………………………………………….. 1p

$2x = \frac{3y+7z}{2}, 3y = \frac{2x+7z}{2}, 7z = \frac{2x+3y}{2}$ …………………………….…. 1p

$2x = 3y = 7z = t$ …………………………………………………. 2p

$\frac{7}{2}t + \frac{2}{3}t + \frac{3}{7}t = 965, \quad t = 210$ …………………………………….. 2p

$x = 105, y = 70, z = 30$ ……………………………………….…………. 1p

Subiectul III

Pe dreapta *d* se consideră punctele *A*, B_1, B_2, B_3...........B_n în această ordine astfel încât $AB_1 = 1, B_1B_2 = 2, B_2B_3 = 4. \dots\dots\dots, B_nB_{n+1} = 2^n$, unde *n* este număr natural mai mare sau egal cu 4.

a) Calculați lungimea segmentului care unește *A* cu mijlocul lui $[B_3B_4]$

b) Arătați că pentru orice număr natural nenul $k \leq n-2$, lungimea segmentului care unește mijlocul lui $[B_{k-1}B_k]$ cu mijlocul lui $[B_{k+1}B_{k+2}]$ este un număr natural divizibil cu 9.

Barem:

1. $a)B_3B_4 = 8$, iar mijlocul îl împarte în două segmente de lungime 4 ....1p

Lungimea căutată este 1+2+4+4=11...1p

b) Segmentele consecutive au lungimile $B_{k-1}B_k = 2^{k-1}, B_kB_{k+1} = 2^k$ și $B_{k+1}B_{k+2} = 2^{k+1}$...1p

Segmentul care unește mijlocul primului cu mijlocul celui de-al treilea are lungimea $2^{k-1}: 2 + 2^k + 2^{k+1}: 2$....................2p

$= 2^{k-2} + 2^k + 2^k = 2^{k-2} \cdot 9 \vdots 9$...2p

Subiectul IV

. În jurul unui punct O se consideră unghiurile $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}$............ $\widehat{A_{n-1}OA_n}, \widehat{A_nOA_1}$, unde n este număr natural nenul.

a) Dacă *n*=4 și $\widehat{A_2OA_3}$ = $2 \cdot \widehat{A_1OA_2}$, iar $\widehat{A_3OA_4}$ = $3 \cdot \widehat{A_1OA_2}$ = $\widehat{A_4OA_1}$, calculați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\widehat{A_1OA_2}$ și semidreapta opusă semidreptei (OA_4.

b) Dacă *n* este par și măsurile unghiurilor $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \ldots \ldots \widehat{A_{n-1}OA_n}, \widehat{A_nOA_1}$ sunt exprimate prin numere naturale consecutive, aflați *n* și m($\widehat{A_1OA_2}$).

Barem:

a) Dacă m($\widehat{A_1OA_2}$)=x, atunci m($\widehat{A_2OA_3}$)=2x, m($\widehat{A_3OA_4}$)=m($\widehat{A_4OA_1}$)=3x

Făcând suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct se obține 9x=360°, deci x=40°...1p

Cum m($\widehat{A_4OA_1}$)=120°, unghiul format de semidreapta opusă lui (OA_4 și $(OA_2$ este de 20°, iar unghiul cerut este de 40°..2p

b) Notând cu a măsura lui $\widehat{A_1OA_2}$, celelalte unghiuri au măsurile a +1, a +2.........., a +(n-1), suma lor fiind $na + 1 + 2 + .. + (n-1) = \frac{n(2a+n-1)}{2}$...1p

Cum această sumă este 360, rezultă că $n(2a + n - 1) = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$..1p

Cum *n* este par și $2a + n - 1$ este număr impar, mai mare sau egal decât *n*+1, rezultă că *n*=16 și *a*=15...........2p

($2a + n - 1$ este unul dintre divizorii impari ai lui 720, adica ai lui 45, dar mai mare decât *n,* singura variant posibilă de scriere a lui 720 în acest mod fiind 45·16)