



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
AN ȘCOLAR 2022 – 2023  
ETAPA LOCALĂ  
11.02.2023

CLASA a V-a

BAREM

**Subiectul I:** Aflați cele mai mici patru numere naturale nenule, știind că suma lor este un pătrat perfect și scăzând pe rând din primul număr 3, adunând la al doilea număr 3, înmulțind al treilea număr cu 3 și împărțind al patrulea număr la 3 se obțin rezultate egale.

Fie  $a, b, c$  și  $d$  cele mai mici numere naturale cu proprietățile date.

$$a + b + c + d = p.p. \text{ (pătrat perfect)}$$

$$a - 3 = b + 3 = c \cdot 3 = d : 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$c \cdot 3 = d : 3 \Rightarrow 9c = d \dots\dots\dots 1p$$

$$a - 3 = 3 \cdot c \Rightarrow a = 3 \cdot c + 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$b + 3 = 3 \cdot c \Rightarrow b = 3 \cdot c - 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$3 \cdot c + 3 + 3 \cdot c - 3 + c + 9 \cdot c = p.p. \Rightarrow 16 \cdot c = p.p. \Rightarrow c = 1, 4, 9, \dots \dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } c = 1 \Rightarrow a = 6, b = 0, d = 9 \text{ (nu convine)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } c = 4 \Rightarrow a = 15, b = 9, d = 36 \text{ (cele mai mici numere care respectă condițiile date)} \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul II:** Aflați toate numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  care împărțite la  $(\overline{ab} + \overline{ac})$  dau câtul egal cu 5 și restul egal cu 3.

$$\overline{abc} = 5 \cdot (\overline{ab} + \overline{ac}) + 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Descompunerea numerelor în baza 10} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calcul, până la forma simplă: } 5 \cdot b = 4 \cdot c + 3 \dots\dots\dots 1p$$

Ultima cifră pt  $5 \cdot b$  este 0 sau 5  $\Rightarrow$  ultima cifră pentru  $4 \cdot c + 3$  este 0 sau 5

$$\Rightarrow \text{ultima cifră pentru } 4 \cdot c \text{ este 2 sau 7, cum } 4 \cdot c \text{ este par} \Rightarrow UC(4 \cdot c) = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$UC(4 \cdot c) = 2 \Rightarrow c \text{ este 3 sau 8} \dots\dots\dots 1p$$



Dacă  $c = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \overline{abc} = \overline{a33} \in \{133; 233; \dots; 933\}$  ..... 1p

Dacă  $c = 8 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow \overline{abc} = \overline{a78} \in \{178; 278; \dots; 978\}$  ..... 1p

**Subiectul III:** Fie numerele 2 ; 3 și 4. Andrei joacă următorul joc: la primul pas el taie cele trei numere și le înlocuiește cu suma celorlalte două numere. La pașii următori procedează în același mod, taie numerele și le înlocuiește cu suma celorlalte două. După câți pași suma numerelor obținute este egală cu 9216?

Suma numerelor inițiale este  $S = 9$

Pasul 1: numerele vor fi înlocuite cu:  $3 + 4$  ;  $2 + 4$  și  $2 + 3 \Rightarrow$  suma se dublează  $S_1 = 2 \cdot 9$  ..... 1p

Pasul 2: numerele vor fi înlocuite cu:  $(2+4+2+3)$  ;  $(3+4+2+3)$  și  $(3+4+2+4)$  ..... 1p

Suma se dublează  $S_2 = 2 \cdot S_1 = 2^2 \cdot 9$  ..... 1p

La fiecare pas suma numerelor este egală cu dublul sumei de la pasul anterior  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  La pasul  $x$  vom avea suma  $S_x = 2 \cdot S_{x-1} = 2^x \cdot 9$  ..... 2p

$2^x \cdot 9 = 9216 \Rightarrow 2^x = 1024 \Rightarrow x = 10$  ..... 2p

**Subiectul IV:** Suma a două numere naturale de două cifre  $x$  și  $y$  este 56. Scriind aceste numere unul lângă altul în ordinea  $\overline{xy}$  și  $\overline{yx}$  se obțin două numere de patru cifre astfel încât unul din ele este cu 439 mai mare decât dublul celuilalt. Aflați numerele  $x$  și  $y$ .

Notăm  $x = \overline{ab}$ ,  $y = \overline{cd}$  și se dă:  $\overline{ab} + \overline{cd} = 56$ , și de exemplu  $\overline{abcd} = 2 \cdot \overline{cdab} + 439$  (1) ..... 1 p

Dar  $\overline{abcd} + \overline{cdab} = 101 \cdot (\overline{ab} + \overline{cd}) = 101 \cdot 56 = 5656$  (2) ..... 2 p

Se pot afla numerele  $x$  și  $y$  prin două metode (metoda figurativă sau prin înlocuirea numărului  $\overline{abcd}$

din relația (1) în relația (2)). ..... 1 p

Prin înlocuirea înlocuirea numărului  $\overline{abcd}$  din relația (1) în relația (2), deducem

$2 \cdot \overline{cdab} + 439 + \overline{cdab} = 5656 \Rightarrow 3 \cdot \overline{cdab} = 5217 \Rightarrow \overline{cdab} = 1739 \Rightarrow$  ..... 2 p

$x = 39$  și  $y = 17$ . ..... 1 p